Licenciaturas en Matemáticas y en Computación,
U. de Guanajuato
Tarea 1 de Álgebra Lineal II: vectores y valores propios.
5 de septiembre de 2012
Fecha de entrega: lunes 10 de septiembre de 2012.

1. ¿Existe un número $a \in \mathbb{R}$ tal que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ -6 & 11 & -5 \end{pmatrix}$$

   tenga los valores propios 0, -1, -2? En caso afirmativo, hallar vectores propios asociados a cada uno de los valores propios dados.

2. (i) Demuestre que un endomorfismo f sobre un espacio vectorial de dimensión finita es invertible si y sólo si el 0 no es un valor propio para f.
   (ii) Demuestre que si f es isomorfismo, k es valor propio de f si y sólo si k^{-1} es valor propio de f^{-1}.

3. Sean V un espacio vectorial sobre el campo K, $f : V \to V$ un endomorfismo y $g(x)$ un polinomio con coeficientes en K. Demuestre que si v es un vector propio para f que corresponde al valor propio λ, entonces v es un vector propio para $g(f)$ que corresponde al valor propio $g(\lambda)$. Enuncie y demuestre el resultado análogo para matrices. Verifique que esto se cumple para el polinomio $g(x) = x^2 - x + 2$ y algún valor propio de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ el endomorfismo dado por:

$$f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

   Hallar los valores propios de f y los subespacios asociados con dichos valores propios.